مثال تمهيدي:

في تجربة إلقاء قطعة نرد منتظمة فضاء العينة هو $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. ليكن $A=\{1,2,3\}$ هو حدث ظهور رقم أقل من أربعة من الواضح أنَّ:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

ليكن $B=\{2,4,6\}$ حدث ظهور رقم زوجي، إنَّ $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

لنسأل الآن: إذا علمنا أن الحدث B قد وقع فما هو احتمال وقوع الحدث A؟ بكلام آخر ما هو احتمال الحصول على رقم زوجي أقل من أربعة؟

نلاحظ أنَّ الشرط المعُطى يختزل فضاء العينة إلى المجموعة $\Omega'=B=\{2,4,6\}$ و يكون الحدث الموافق لظهور رقم زوجي هو $A\cap B=\{2\}$ وبالتالي الاحتمال المطلوب هو

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3}$$

إن هذا المثال يوضح لنا كيف أنّ بعض الأحداث تختلف احتمالاتها تبعاً لاختلاف فضاء العينة

مثال:

بفرض أن احتمال إقلاع طائرة في الوقت المحدد لها هو $P(B)=0.83$ و احتمال أن تصل في الوقت المحدد هو $P(A)=0.82$ و احتمال أن تقلع و أن تصل في الوقت المحدد هو $P(A\cap B)=0.78$. احسب :

1 احتمال وصول الطائرة في موعدها علماً أنها أقلعت في موعدها.

2 احتمال إقلاع الطائرة في موعدها علماً أنها وصلت في الموعد المحدد.

الحل:

1 إن الاحتمال المطلوب هو

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.78}{0.83}=0.94$$

حيث $P[A\cap B]=0.78$

2 إن احتمال إقلاع الطائرة في موعدها علماً أنها وصلت على الموعد هو

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.78}{0.82}=0.95$$

مثال:

حقيبتان الأولى تحوي 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء. الثانية تحوي 3 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء. سُحبت كرة من الحقيبة الأولى ووُضعت دون رؤيتها في الكيس الثاني ثم سُحبت كرة من الحقيبة الثانية. ما هو احتمال أن تكون هذه الكرة سوداء؟

الحل:

لتكن لدينا الأحداث الثلاثة التالية: W_2,W_1,B_2,B_1 والتي تمثل حدث سحب كرة سوداء من الحقيبة الأولى، حدث سحب كرة سوداء من الحقيبة الثانية و حدث سحب كرة بيضاء من الحقيبة الأولى و حدث سحب كرة بيضاء من الحقيبة الثانية على الترتيب. عندئذ يكون الحدث المطلوب حساب احتماله هو $(B_1\cap B_2)\cup(W_1\cap B_2)$. إنّ هذين الحدثين متنافيين و بالتالي باستخدام البديهية الثالثة للاحتمال نجد أن:

$$P\left[(B_1\cap B_2)\cup(W_1\cap B_2)\right]=P\left[(B_1\cap B_2)\right]+P\left[(W_1\cap B_2)\right]$$

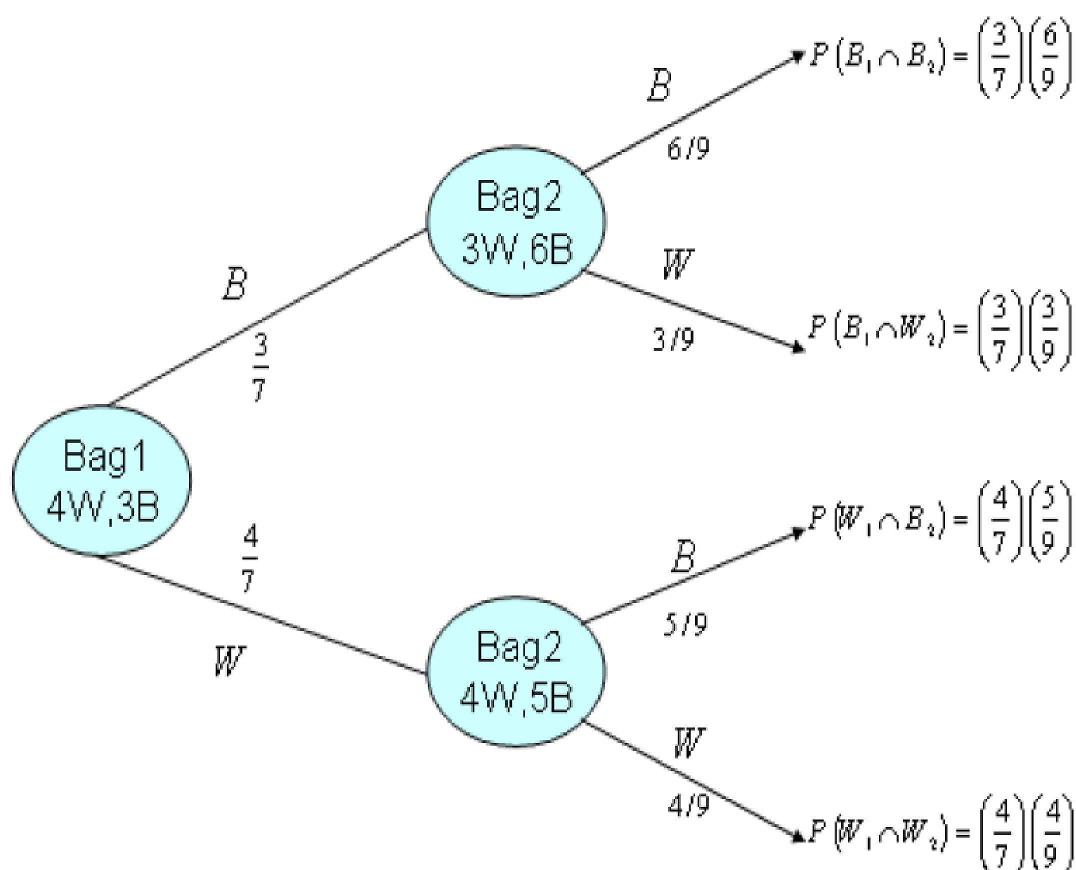
بتطبيق قاعدة الضرب نجد أنّ:

$$P\left[\left(B_1 \cap B_2\right) \cup \left(W_1 \cap B_2\right)\right] = P\left(B_1\right) P\left(B_2 \mid B_1\right) + P\left(W_1\right) P\left(B_2 \mid W_1\right)$$

$$= \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{38}{63}\right).$$

المخطط أدناه يوضح عمليات السحب الممكنة و الاحتمالات المقابلة لكل الأحداث الناتجة.

هذا النوع من المخططات يُسمى المخطط الشجري.



مثال:

لنفرض أننا نقوم بإلقاء قطعة نرد منتظمة مرة واحدة و لتكن لدينا الأحداث:

$$A=\{2,3,4\}, B=\{2,6\}, C=\{1,2,3\}, D=\{2,4,5,6\}.$$

احسب الاحتمالات التالية: $P(A), P(B), P(C), P(D) \text{ and } P(A|D)$. ماذا تستنتج؟

الحل:

بسهولة نحصل على ما يلي:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$
$$P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, P(D)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

من تعريف الاحتمال الشرطي نجد أنّ:

$$P(A|D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{2/6}{2/3}=\frac{1}{2}$$

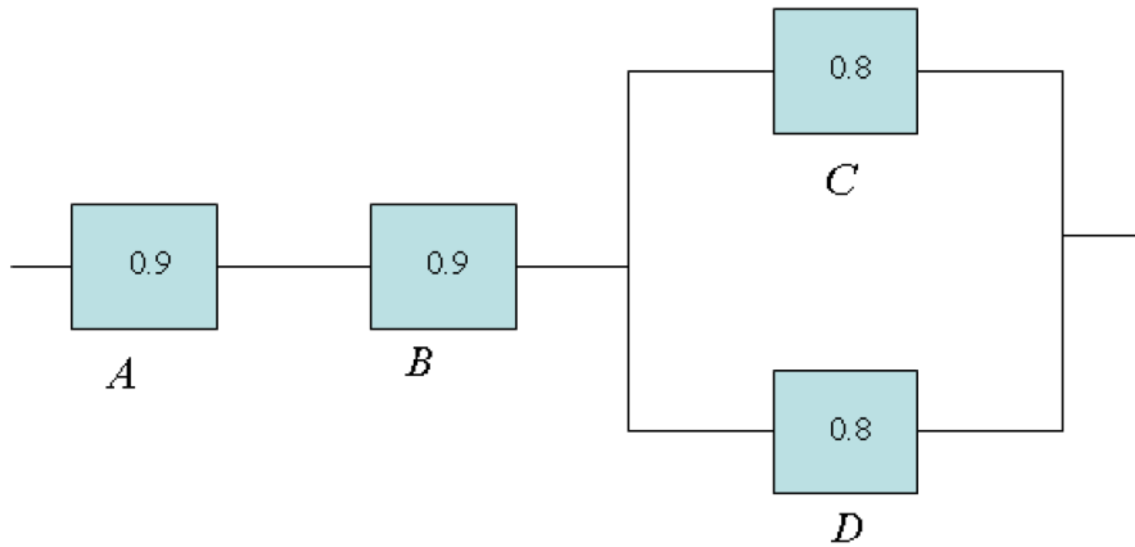
لاحظ أنّ $P(A|D)=P(A)$ و بالتالي وقوع الحدث D لا يؤثر على وقوع الحدث A.

نستنتج إذاً أنّ الحدثين A و D مستقلان.

مثال:

نظام كهربائي يتكون من أربع وحدات كما في الشكل أدناه. النظام يعمل إذا كانت الوحدات A و B تعملان و إحدى الوحدتين C أو D تعمل. بفرض أنّ الوحدات تعمل بشكل مستقل و أنّ احتمال عمل كل وحدة معطى في الرسم التوضيحي أدناه. ما هو:

1. احتمال أن يكون النظام في حالة عمل؟
2. احتمال أن لا تعمل الوحدة C علماً أن النظام يعمل؟



الحل:

1. النظام يكون في حالة عمل إذا وقع الحدث $A \cap B \cap (C \cup D)$ وبالتالي :

$$P\left[A \cap B \cap (C \cup D)\right] = P(A)P(B)P(C \cup D)$$
$$= P(A)P(B)\left[1 - P(C' \cap D')\right]$$
$$= P(A)P(B)\left[1 - P(C')P(D')\right]$$
$$= (0.9)(0.9)\left[1 - (0.2)(0.2)\right] = 0.7776$$

2. الاحتمال الشرطي المطلوب هو:

$$P\left[C' \middle| A \cap B \cap (C \cup D)\right] = \frac{P\left(C' \cap A \cap B \cap (C \cup D)\right)}{P\left(A \cap B \cap (C \cup D)\right)}$$
$$= \frac{P\left[A \cap B \cap C' \cap (C \cup D)\right]}{0.7776}$$
$$= \frac{P\left[A \cap B \cap C' \cap D\right]}{0.7776}$$
$$= \frac{P(A)P(B)P(C')P(D)}{0.7776}$$
$$= \frac{(0.9)(0.9)(0.2)(0.8)}{0.7776} = 0.1667$$

مثال :

ليكن لدينا فضاء العينة التالي

$$\Omega=\{abc,acb,cab,cba,bca,bac,aaa,bbb,ccc\}$$

نفرض أن جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال. احتمال كلٍ منها هو $\frac{1}{9}$. نعرف الحدث A_k كما يلي: الحرف a يحتل الموقع رقم k حيث $k=1,2,3$. لاحظ ان الأحداث A_1,A_2,A_3 مستقلة مثنى مثنى و لكن غير مستقلة. لأن

$$P(A_1)=P\{abc,acb,aaa\}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$P(A_2)=P\{bac,cab,aaa\}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}:$$

$$P(A_3)=P\{bca,cba,aaa\}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

ولاحظ أن: $P(A_i\cap A_j)=P(\{aaa\})=\frac{1}{9}=P(A_i)P(A_j);i,j=1,2,3 \text{ and } i\neq j$

و لكن

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(\{aaa\})=\frac{1}{9}\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{27}$$

مثال:

ثلاثة رماة A,B,C احتمال إصابتهم للهدف هو $\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{1}{2}$ على الترتيب. إذا صوب كل منهم طلقة واحدة نحو الهدف ذاته فما هو احتمال :

1. إصابة الهدف.
2. إصابة الهدف بطلقة واحدة.
3. عدم إصابة الهدف.

الحل:

لنرمز بـ :

A لحدث إصابة الهدف من قِبل الرامي A و يكون $P(A)=\frac{3}{5}$.

B لحدث إصابة الهدف من قِبل الرامي B و يكون $P(B)=\frac{2}{3}$.

C لحدث إصابة الهدف من قِبل الرامي C و يكون $P(C)=\frac{1}{2}$.

1. يصاب الهدف إذا وقعت أي من الأحداث A أو B أو C أي إذا وقع الحدث $(A\cup B\cup C)$. ويكون:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

و بما أنّ الأحداث A, B, C مستقلة لأنّ احتمال إصابة كل منهم للهدف هي مقدار ثابت دوماً فإنّ:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) \\ &\quad - P(A)P(C) - P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) \\ &\cong 0.93 \end{aligned}$$

يمكن حساب الاحتمال السابق بطريقة أخرى و ذلك إذا لاحظنا أنّ:

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P\left((A \cup B \cup C)'\right) = 1 - P(A' \cap B' \cap C')$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) \cong 0.93$$

و ذلك لكون الأحداث A', B', C' مستقلة اعتماداً على المبرهنة 5 .

2. إن إصابة الهدف طلقة واحدة يقع إذا وقع أحد الأحداث $(A \cap B' \cap C')$ أو $(A' \cap B \cap C')$ أو $(A' \cap B' \cap C)$ المتنافية مثنى. و يكون الاحتمال المطلوب هو :

$$\begin{aligned} &P\left[(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)\right] \\ &= P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) \\ &= P(A)P(B')P(C') + P(A')P(B)P(C') + P(A')P(B')P(C) \\ &= \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{30} = 0.3. \end{aligned}$$

3. إنّ حدث عدم إصابة الهدف يقع إذا وقع الحدث $(A \cup B \cup C)' \equiv (A' \cap B' \cap C')$ ومنه:

$$\begin{aligned} P(A' \cap B' \cap C') &= P(A')P(B')P(C') \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{15} = 0.067 \cong 0.07. \end{aligned}$$

مثال:

في مصنع للتجميع، لدينا ثلاث آلات B_1,B_2,B_3 تنتج $30\%, 45\%, 25\%$ من المنتج النهائي على الترتيب. نعلم أن $2\%, 3\%, 2\%$ من منتجات الآلات الثلاثة على الترتيب غير صالحة. ما احتمال الحصول على منتج غير صالح في حال تم اختيار أحد منتجات هذا المصنع عشوائياً.

الحل:

لتكن لدينا الأحداث التالية:

- A: المنتج المسحوب عشوائياً غير صالح,
- B_1: المنتج المسحوب من إنتاج الآلة B_1 حيث $P(B_1)=0.3$ ،
- B_2: المنتج المسحوب من إنتاج الآلة B_2 حيث $P(B_2)=0.45$,
- B_3: المنتج المسحوب من إنتاج الآلة B_3 حيث $P(B_3)=0.25$

لاحظ أن الأحداث B_1,B_2,B_3 تشكل تجزئة. بتطبيق مبرهنة الاحتمال الكلي نجد أن:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i) \\
&= P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3) \\
&= (0.3)(0.02)+(0.45)(0.03)+(0.25)(0.02) \\
&= 0.006+0.0135+0.005=0.0245.
\end{aligned}
$$

مثال:

في المثال السابق ما هو احتمال أن يكون المنتج المسحوب من إنتاج الآلة الثالثة علماً أنه غير صالح.

الحل:

الاحتمال المطلوب حسابه هو $P(B_3|A)$. لاحظ أنّ كل شروط المبرهنة السابقة محققة وأنّ B_1, B_2, B_3 تشكل تجزئة و $P(A) \neq 0$ أي أننا نستطيع تطبيق قانون بايز ويكون:

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}$$

$$= \frac{0.005}{0.0245} = \frac{10}{49}.$$